ポーキングのあるM/G/l待ち行列(待ち行列理論とその周辺)

AUTHOR(S):

池田, 重吉; 西田, 俊夫

CITATION:

池田, 重吉 ...[et al]. ポーキングのあるM/G/l待ち行列(待ち行列理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1985, 564: 134-146

ISSUE DATE:

1985-06

数理解析研究所講究録
564巻 1985年 134-146

ボーキングのあるM/G/1待ち行列

阪大工学部　池田重吉（Zyūkiti Ikeda）
西田俊夫（Toshio Nishida）

1．はじめに

待ち行列につこうとした客が行列の長さ（系内人数）を見て，行列につくことなく立ち去る（ボーキング）現象は一般によく目にする。この場合，どのような条件で待ち行列（系内人数過程）が安定であるかは興味のある問題である。

たとえば，M/M/1ボーキングQueueの系内人数過程は出生・死滅過程となり，系内人数 i 人のときの到着率を λ_i，サービス時間の平均を $\frac{1}{\mu}$ とすれば以下の結果が知られている。

正再帰的の必要十分条件は $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu^j}<\infty$

零再帰的の　〃　$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu^j}=\infty$ & $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu^j}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_j}=\infty$

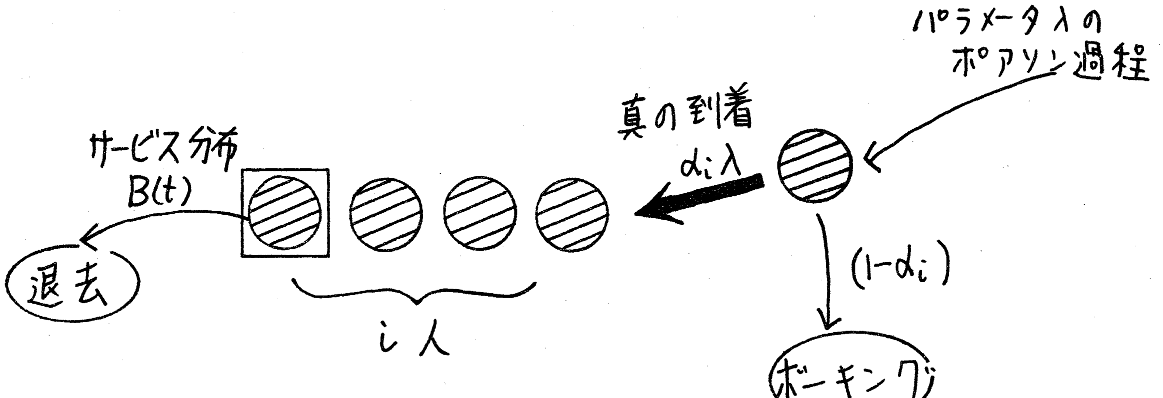
推移的の　〃　$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu^j}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_j}<\infty$　。

M/M/S型のボーキングQueueについては河田[11]，Conway & Maxwell [4]，Ancker & Gafarian [1]，Haight [8]などによって研究されている。M/G/1型については，ボーキング確率を特定したモデルについてR.S. Dick [5] が解析している。サービス時間の分布がE_kのときW.K. Grassmann [7]は系内人数の定常分布の漸化式を与えている。また，本間[9]は系内人数過程が安定であるための条件を与えている。

ここでは，M/G/1ボーキングQueueの系内人数過程に埋め込まれた（客の退去直後）マルコフ連鎖の再帰性を評価し，離散時間，連続時間の定常分布を与える。

2．モデルの説明

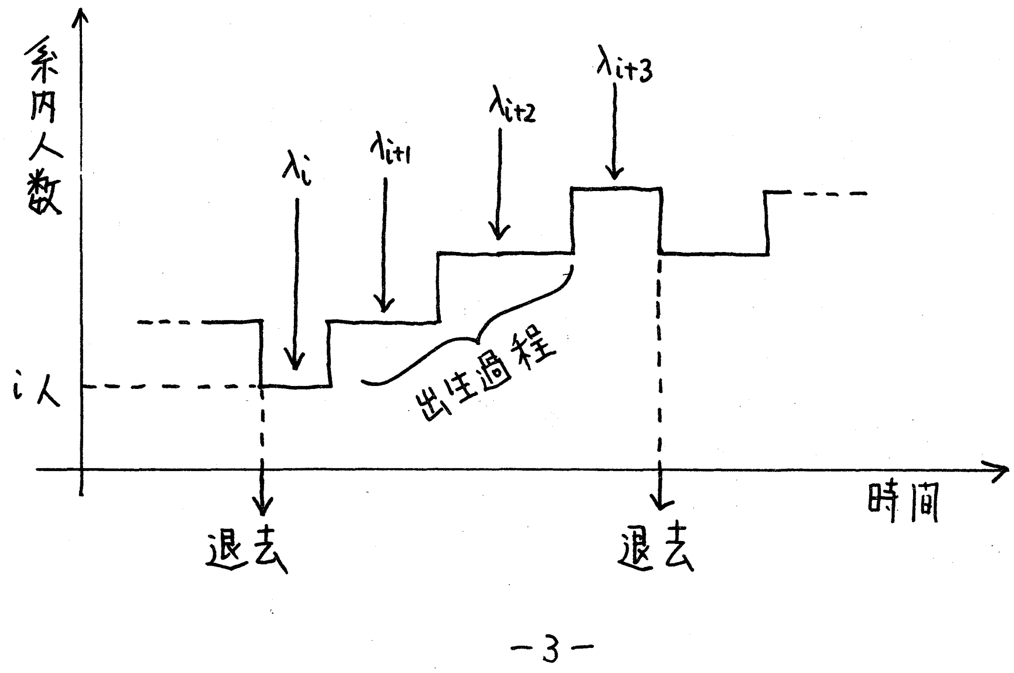
下図のように，パラメータλ（>0）のポアソン過程で到着した客は，系内人数がi人なのを見て確率$(1-\alpha_i)$，$(0<\alpha_i\leq 1)$で行列につくことなく立ち去る。サービス時間分布は$B(t)$



（$0 < \int_0^\infty t\,dB = \frac{1}{\mu} < \infty$）とする。

ここで，α_iは必ずしも単調減少でないであろう。つまり，サービス窓口が混んでいるからといって，到着した客がそのまま立ち去り易いとは限らないであろう。ここでは，もう少し一般的に，系内人数iに依存した到着率λ_iで真の到着があるような場合を考える（真の到着率の有界性，$\alpha_i \lambda \leq \lambda$，の仮定を除いた，ただし$\lambda_i > 0$。）。そのかわりに，次に考える出生過程が有限時間で発散しないために，$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$とする。系内人数過程のパスは下図のようになる。

以上より，客の退去直後から次の客の退去直前までの系内人数過程は出生過程になると考えられる。客の退去があると系内人数は1人減り，次の退去直前まで再び系内人数は出生過程となる。



系内人数 i 人から出発したこの出生過程が t 時間後に j 人になる確率を $k_{ij}(t)$, $(t\geq 0,\ i,j\geq 0)$ とすれば，$\{k_{ij}(t)\}$ は次の微分方程式の唯一の解になる（W. Feller [6], P402-406）。

$k_{ii}(0)=1$, $\mathbb{k}_i(t)=(k_{ii}(t),\ k_{i\,i+1}(t),\ k_{i\,i+2}(t),\ \cdots)$ として

$$(4,1)\qquad \mathbb{k}_i'(t)=\mathbb{k}_i(t)\begin{bmatrix} -\lambda_i & \lambda_i & & & \\ & -\lambda_{i+1} & \lambda_{i+1} & & \\ & & -\lambda_{i+2} & \lambda_{i+2} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

この場合，条件 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$ は $\sum_{j=i}^{\infty}k_{ij}(t)=1$ を保障している。

3．埋め込まれたマルコフ連鎖と極限分布

2章で説明したようにして得られた連続時間系内人数過程を $\{X_t\}$，退去時刻過程を $\{T_n\}$，客が退去した直後の離散時間系内人数過程を $\{Y_n\}$ $(Y_n=X_{T_n})$ とする。

M/G/1 の場合と同様に考えて，$\{Y_n\}$ は次の推移確率行列

$$(4.2)\qquad \mathbb{P}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ & & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ & 0 & & a_{44} & \ddots \end{bmatrix},\quad a_{ij}=\int_0^{\infty}k_{ij}(t)\,dB$$

Pに従うマルコフ連鎖になる。このタイプの連鎖はC.M. Harris [10]にも表れる、そこでは"系内人数に依存したサービス時間分布を持つM/G/1 Queue"を扱っている, その場合推移確率は, $p_{ij-1}=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}dB_i$, ただし $B_i(t)$ はサービス開始時刻の系内人数に依存したサービス時間分布, となっている。次に与える定理1は, 一般に, (4.2) タイプの推移行列を持つ非周期, 既約なマルコフ連鎖について成立する（オ1行目と2行目は同じである必要はない）。

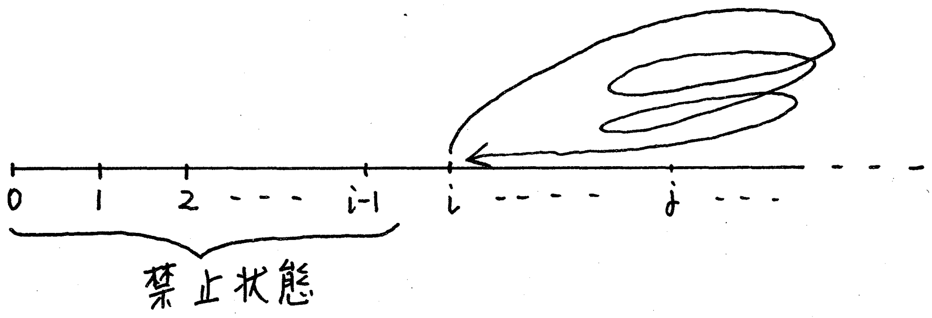
待ち行列の関連性（双対性？）という点では, M/G/1 ポーキングQueueは"系内人数に依存したサービス時間分布を持つGI/M/1 Queue"（この場合, 埋め込まれたマルコフ連鎖の推移行列は (4.2) のPとは逆の三角形になる。）と密接な関連があると予想される。

まず次の記号を用意する。

$$
(5.1)\begin{cases}
\overline{a}_{ij}=1-a_{ii}-a_{i\,i+1}-\cdots-a_{ij}\ , & i<j\\
b_{ij}=\dfrac{\overline{a}_{ij}}{a_{ii}}\ , & i<j\\
Q_{ii}=1 & \\
Q_{ij}=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ \sum_{i=j_0<j_1<\cdots<j_n=j} b_{j_0j_1}b_{j_1j_2}\cdots b_{j_{n-1}j_n}\ , & i<j
\end{cases}
$$

Q_{ij}/a_{jj} は次のような意味をもつ，（下図参照）

$\dfrac{Q_{ij}}{a_{jj}}$；状態 i から出発し，$(i-1)$ を通ることなく，i に戻るまでに j を訪問する平均回数，$i<j$。



定理 1.

(4.2) の P タイプの非周期，既約なマルコフ連鎖について以下の必要・十分条件が得られる。

正再帰的 —— $\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{Q_{ij}}{a_{jj}} < \infty$

零再帰的 —— $\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{Q_{ij}}{a_{jj}} = \infty$ & $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\sum_{r=1}^{k} Q_{rk}}{Q_{1k}} = \infty$

推移的 —— $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\sum_{r=1}^{k} Q_{rk}}{Q_{1k}} < \infty$

また，正再帰的であるとき定常分布 $\{\pi_i\}$ は，

$$(6,1)\quad \begin{cases} \pi_0 = 1 \Big/ \left(\sum_{j=1}^{\infty} Q_{ij}/a_{jj} \right) \\ \pi_1 = \dfrac{1-a_{11}}{a_{11}}\, \pi_0 \end{cases}$$

$$\pi_i = \frac{Q_{1i}}{a_{ii}}, \quad i \geq 2$$

となる。

定常分布は書き下せば，次のようになっている。

$$\pi_2 = \frac{Q_{12}}{a_{22}} = \frac{\overline{a_{12}}}{a_{11}\,a_{22}}$$

$$\pi_3 = \frac{Q_{13}}{a_{33}} = \frac{\overline{a_{13}}}{a_{11}\,a_{33}} + \frac{\overline{a_{12}}\,\overline{a_{23}}}{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}}$$

$$\pi_4 = \frac{Q_{14}}{a_{44}} = \frac{\overline{a_{14}}}{a_{11}\,a_{44}} + \frac{\overline{a_{12}}\,\overline{a_{24}}}{a_{11}\,a_{22}\,a_{44}} + \frac{\overline{a_{13}}\,\overline{a_{34}}}{a_{11}\,a_{33}\,a_{44}} + \frac{\overline{a_{12}}\,\overline{a_{23}}\,\overline{a_{34}}}{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}}$$

$$\vdots$$

（定理1の証明の概略）

K.L. Chung（[2]，I.12）と同じ考え方で

${}_k f^*_{ij}$；状態 i から出発して，k を通ることなく，いつかは j に到達する確率

は次のようになる。

$${}_k f^*_{ij} = \frac{\sum_{r=i+1}^{k} Q_{rk}}{\sum_{r=j+1}^{k} Q_{rk}}, \quad j < i < k$$

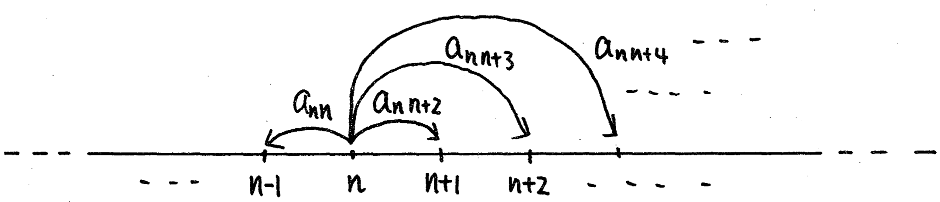
$${}_k f^*_{00} = \frac{\sum_{r=1}^{k} Q_{rk} \sum_{j=1}^{r} a_{1j}}{\sum_{r=1}^{k} Q_{rk}}, \quad k > 0$$

禁止状態をはずしたものについては $f^*_{ij} = \lim_{k\to\infty} {}_k f^*_{ij}$ の関係が

知られている。 同様にして，iから出発してjに到着するまでの平均時間が得られる。 これらより，定理の必要・十分条件が求められる。 定常分布については順次，解くことができる。 □

定理1の再帰性に関する必要・十分条件は複雑であるため，もっと扱い易い十分条件がほしい。 そのために，まず次のような量を考える。（下図参照）

(8.1) $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} b_{nj} = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} r\, a_{n\,n+r+1}}{a_{nn}} = \frac{\text{(状態nから大きい状態への平均推移)}}{\text{(〃　小さい　〃)}}$



（大きい方への平均推移）

$= a_{n\,n+2} + 2a_{n\,n+3} + 3a_{n\,n+4} + \cdots$

一般に，$C_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_{nj}$ は ∞ の値をとることもありえる。

系1.

定理1より，次の十分条件が得られる。

1). $\exists a, \forall n, a_{nn} > a > 0$ & $\forall n, C_n < \infty$ & $\limsup C_n < 1$ ならば 正再帰的

2). $\forall n, C_n < \infty$ & $\exists N \le n$, $C_n \le 1$ ならば 再帰的

3). $\forall \varepsilon > 0$, $\exists L(\varepsilon)$, $\exists N(\varepsilon) \leq n$, $\sum_{j=n+1}^{n+L} b_{nj} > 1-\varepsilon$

ならば零再帰的 or 推移的

4). $\exists b$, $\exists L$, $\exists N \leq n$, $\sum_{j=n+1}^{n+L} b_{nj} > b > 1$ ならば推移的

M/G/1 ボーキングQueueに戻れば，次の結果が得られる。

定理2.

M/G/1 ボーキングQueue について定理1が成立する。

ただし,

$$a_{ij} = \int_0^\infty k_{ij}(t)\,dB \quad , \quad b_{ij} = \frac{\overline{a_{ij}}}{a_{ii}} = \frac{\lambda_j \int_0^\infty \int_0^t k_{ij}(\tau)\,d\tau\,dB}{a_{ii}} \quad 。$$

系1より，$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ のとき.

1). 正再帰的であるための必要・十分条件は　$\lambda/\mu < 1$

2). 零再帰的であるための十分条件は $\exists N \leq n$, $\lambda_n = \lambda$ & $\lambda/\mu = 1$

3) 推移的　　　〃　　　$\lambda/\mu > 1$

定理2の条件1)～3)は本間[9]の場合と一致する。

準再帰過程の極限定理（Çinlar, E. [3] P343–350）より,

定理3.

M/G/1ボーキングQueueの連続時間系内人数過程の極限分布 $P_i = \lim_{t\to\infty} P(X_t = i)$ は次式で与えられる。

$$P_i = \frac{\pi_i}{c\lambda_i} \quad , \quad i \geq 0$$

(ただし，正再帰的の場合である。
$C=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\pi_i}{\lambda_i}=\frac{1}{\mu}+\frac{\pi_0}{\lambda_0}$ ，π_i は定理1と同じ。)

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi_i}{\lambda_i}=\frac{1}{\mu}$ は，平衡状態において，サービス開始後次の客が到着するまでの平均時間は平均サービス時間と等しい，ことを意味している。

4-1．M/E_2/1 ボーキングQueueへの応用

サービス分布 E_2 の平均を $2/\mu$ とすれば，

$$a_{ii}=\frac{\mu^2}{(\lambda_i+\mu)^2}$$

(10.1)
$$a_{ij}=\frac{\mu^2\lambda_i\lambda_{i+1}\cdots\lambda_{j-1}}{(\lambda_i+\mu)(\lambda_{i+1}+\mu)\cdots(\lambda_j+\mu)}\left[\frac{1}{\lambda_i+\mu}+\frac{1}{\lambda_{i+1}+\mu}+\cdots+\frac{1}{\lambda_j+\mu}\right],\ i<j$$

$$\frac{Q_{ij}}{a_{jj}}=e_i\cdots e_j\left[j-i+2+\sum_{n\geq 1}\sum_{i-1=j_0<\cdots<j_{n+1}=j+1}(j_1-j_0)\cdots(j_{n+1}-j_n)e_{j_1}\cdots e_{j_n}\right]$$

(ただし $e_i=\frac{\lambda_i}{\mu}$ とする。)

となる。定理1，定理3に適用すれば，正再帰の条件，極限分布等が得られる。

4-2．M/G/1/K+1 Queueへの応用

2章ではマルコフ連鎖の既約性を保障するため $\lambda_i>0$ を仮定したが $\lambda_i=\begin{cases}\lambda, & 0\leq i\leq K\\ 0, & i\geq K+1\end{cases}$ を結果に代入すれば，有限待

ち合い室の場合になる。

(11.1)
$$a_{ij}=\begin{cases} a_{j-i}=\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}dB & ,1\le i\le j\le K \\ \displaystyle\int_0^\infty \sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-i}}{(n-i)!}e^{-\lambda t}dB & ,1\le i\le j=K+1 \\ 1 & ,K+1\le i=j \\ 0 & ,\text{その他} \end{cases}$$

$$b_{ij}=\begin{cases} b_{j-i}=\dfrac{1-a_0-\cdots\cdots-a_{j-i}}{a_0}=\dfrac{\lambda\displaystyle\int_0^\infty\int_0^t\frac{(\lambda\tau)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda\tau}d\tau dB}{a_0} & ,1\le i\le j\le K \\ 0 & ,\text{その他} \end{cases}$$

$$Q_{ij}=\begin{cases} Q_{j-i}=\displaystyle\sum_{n\ge1}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=j-i\\ j_\ell\ge1}} b_{j_1}\cdots b_{j_n} & \\ \qquad=\displaystyle\sum_{\substack{1\cdot i_1+\cdots+m\cdot i_m=j-i\\ i_\ell\ge0}}\frac{(i_1+\cdots+i_m)!}{i_1!\cdots i_m!}b_1^{i_1}\cdots b_m^{i_m} & ,1\le i<j\le K \\ 1 & ,\ i=j \\ 0 & ,\ \text{その他.} \end{cases}$$

となる。

(11.2)
$$\begin{cases} \pi_0=1\Big/\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k}Q_j/a_0\right) \\ \pi_1=\pi_0(1-a_0)/a_0 \\ \pi_i=\pi_0 Q_{i-1}/a_0 & ,\ 2\le i\le K \end{cases}$$

とすれば，$\{\pi_i,\ 0\le i\le k\}$ は M/G/1/K+1 Queue の系内人数の定常分布になる。実際，母関数を考えればよい。

5. 今後の課題

定理1で与えた再帰性の必要・十分条件は扱いにくいため、系1または定理2で判別しやすい条件を与えたわけだが、たとえば定理2のように、到着率 $\{\lambda_i, i \geq 0\}$ とサービスの平均 $\frac{1}{\mu}$ の関係からだけではこれ（定理2、条件1)〜3)）が限界だと思う。せいぜい、$\lim \lambda_n = \lambda$ を $\limsup \lambda_n = \lambda_s$ ，$\liminf \lambda_n = \lambda_f$ に手直しするぐらいである。 サービスの分散または一般にn次のモーメントを使って，$\lim \lambda_n$ が存在しない場合の再帰性を判定する十分条件は今後研究したい課題である。

参考文献

[1] Ancker, C.J. & Gafarian, A.V. (1963) "Some queueing problems with balking and reneging. I." Opns. Res., 11, 88-100.

[2] Chung, K.L. (1967) Markov chains with stationary trasition probabilities, 2nd., Springer, Berlin

[3] Çinlar, E. (1975) Introduction to stochastic processes, Prentice-Hall, Inc.

[4] Conway, R.W. & Maxwell, W.L. (1961) "A queuing model with state dependent service rate." J. Industrial Eng., 10, 131-142.

[5] Dick, R.S. (1970) "Some theorem on single-server queue with balking", Opns. Res., 18, 1193-1206

[6] Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and its Applications,

2nd, John Wiley, New York.

[7] Grassmann, W. K. (1974) "The steady state behavior of the M/Ek/1 queue with state dependent arrival rates", INFOR, 12, 163-173.

[8] Haight, F. A. (1957) "Queuing with balking" Biometrika, 44, 360-369.

[9] Homma, T. (1955) "On a certain queuing process" Rep. Statist. Appl. Res. Un. Japan Sci. Engrs., 4, 14-37.

[10] Harris, C. M. (1967) "Queues with state-dependent stochastic service rates" Opns. Res., 15, 117-130.

[11] Kawata, T. (1955) "A problem in the queuing theory" Rep. Statist. Appl. Res. Un. Japan Sci. Engrs., 3, 122-129.